4.8.1 Çözümlü Problemler

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ şeklinde tanımlanan $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$ fonsiyonunun $\max\{f : x \in [-4,4]\}, \min\{f : x \in [-4,4]\}$ değerlerini ve $f([-4,4])$ kümesini bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 3x^2+6x-9$ olduğundan, $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2+6x-9 = 0 \Longrightarrow x = -3, x = 1$ dir. O halde, -3 ve 1 noktaları f nin [-4,4] aralığında ekstremuma göre kritik noktalardır. $f(-4) = 25, f(-3) = 32, f(1) = 0$ ve $f(4) = 81$ olduğuna göre, $\max\{f : x \in [-4,4]\} = \max\{f(-4), f(-3), f(1), f(4)\} = f(4) = 81$, $\min\{f : x \in [-4,4]\} = \min\{f(-4), f(-3), f(1), f(4)\} = f(1) = 0$ dir. Buna göre, f sürekli olduğundan, $f([-4,4]) = [0,81]$ dir. $\diamond$

(2) $f(x) =| 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 43 |$ şeklinde tanımlanan $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\max\{f : x \in [-2,3]\}$, $\min\{f : x \in [-2,3]\}$ değerlerini ve $f([-2,3])$ kümesini bulunuz.

Çözüm: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) =| x |$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında türevsiz olduğuna göre, verilen f fonksiyonu $3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 43 = 0$ denkleminin köklerinde türevsiz olabilir. Söz konusu kökleri bulalım. $3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 43 = (x+1)(3x^3 - 19x^2 + 43x - 43)$ olduğu açıktır. $g(x) = 3x^3 - 19x^2 + 43x - 43$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $g'(x) = 9x^2+38x+43 > 0$ olduğundan g fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde artan ve $g(3) < -4$ olduğuna göre, $\forall x \in [-2,3]$ için $g(x) < 0$ dır. Buna göre, f nin $[-2,3]$ aralığında türevsiz olduğu tek nokta -1 dir. $x \in [-2,-1)$ için $f'(x) = 12x(x-2)^2$ ve $x \in (-1,3]$ için $f'(x) = -12x(x-2)^2$ olduğu açıktır. O halde, -1, 0 ve 2 noktaları f nin $[-2,3]$ aralığında ekstremuma göre kritik noktalarıdır. $f(-2) = 229, f(-1) = 0, f(0) = 43, f(2) = 27, f(3) = 16$ olduğuna göre, $\max\{f : x \in [-2,3]\} = f(-2) = 229, \min\{f : x \in [-2,3]\} = f(-1) = 0$ dır. Buna göre, f sürekli olduğundan, $f([-2,3]) = [0,229]$ dur. $\diamond$

(3) $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^m(1-x)^n$ fonsiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = (m+n)x^{(m-1)}(1-x)^{(n-1)}(\frac{m}{n+m} - x)$ olduğundan, $f'(x) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0\ (m > 1),\ x_2 = \frac{m}{n+m}, x_3 = 1 (n > 1)$ dir. Fonksiyonun türevsiz olduğu noktaları yoktur. O halde, kritik noktalar $0, \frac{m}{n+m}$ ve 1 dir. Türevin işaret tablosunu yapalım.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{m}{n+m})$	$\frac{m}{n+m}$	$(\frac{m}{n+m}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-, m$ çift ise, $+, m$ tek ise,		$+, m$ çift ise, $+m$ tek ise,		$-, n$ çift ise, $+, n$ tek ise,		$+,\ n$ çift ise, $+,\ n$ tek ise,
$f(x)$	$\searrow, m$ çift ise, $\nearrow, m$ tek ise,	0	$\nearrow$		$\searrow, n$ çift ise, $\nearrow, n$ tek ise,	0	$\nearrow$

Tablodan görüldüğü gibi m çift olduğunda $x_1 = 0$ noktası yerel minimum, n tek olduğunda, $x_3 = 1$ noktası yerel minimum, $x_2 = \frac{m}{n+m}$ noktası yerel maksimum noktasıdır. $m > 1$ ve tek olduğunda, $x_1 = 0$ kritik noktası ekstremum nokta değildir. $\diamond$

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}), & x \neq 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz.

Çözüm: $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $f(k) - f(0) = e^{-\frac{1}{|k|}}(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{k}) > 0$ olduğundan, $x = 0$ noktası f nin yerel minimum noktası ve $f(0) = 0$ dır. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $f'(x) = x^{-2}e^{-\frac{1}{|x|}}((\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x})\text{sgn}x - \cos\frac{1}{x})$ ve $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $|\ \sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\ | \leq \sqrt{2}$ olduğundan, $f'(x) = 0$ olacak şekilde $x_0 \neq 0$ noktasını geçtikte $f'(x)$ türev fonksiyonu işaretini degişmez. Buna göre, f nin $x = 0$ noktasından farklı yerel ekstremum noktası yoktur. $\diamond$

(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = e^{-x^2}\cos x^2$ fonksiyonu için $m = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\},\ M = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ leri bulunuz.

Çözüm: f çift olduğundan, f nin $[0, \infty)$ aralığında incelenmesi yeterlidir. $\forall x \in [0, +\infty)$ için $f'(x) = -2\sqrt{2}xe^{-x^2}\cos(\frac{\pi}{4} - x^2)$ olduğundan,

$x_1 = 0$ ve $x_k = \sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ noktaları f nin ekstremuma göre kritik noktalardır. $f(0) = 1, f(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3\pi}{4} - 2k\pi}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ olduğuna göre, $m = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3\pi}{4}}$ ve $M = 1$ dir. $\diamond$

(6) $\forall x \in [0, 1]$ ve $\forall$p > 1 için

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1 - x)^p \leq 1$$

eşitsizliğinin sağladıgını gösteriniz.

Çözüm: $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^p + (1 - x)^p$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $\forall x \in (0, 1)$ için $f'(x) = p(x^{p-1} - (1 - x)^{p-1})$ olduğundan, $f'(x) = 0 \implies x = \frac{1}{2}$ dir. $f(0) = f(1) = 1, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{p-1}} \implies$ $min\{f(0), f(\frac{1}{2}), f(1)\} = \frac{1}{2^{p-1}}$, $\max\{f(0), f(\frac{1}{2}), f(1)\} = 1$ bulunur. Buradanda istenen eşitsizliğin sağlandıgı anlaşılır. $\diamond$

(7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,f(x) = \max\{2 \mid x \mid, \mid 1 + x \mid\}$ fonksiyonunun mutlak minimumunu bulunuz.

Çözüm: $2 \mid x \mid \geq \mid 1 + x \mid$, yani $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, +\infty)$ olduğunda $f(x) = 2 \mid x \mid$, $2 \mid x \mid < \mid 1 + x \mid$, yani $x \in (-\frac{1}{3}, 1)$ olduğunda $f(x) = \mid 1 + x \mid$ olur. Buna göre,

$$f(x) = \begin{cases} \mid 1 + x \mid, & x \in (-\frac{1}{3}, 1) \text{ ise,} \\ 2 \mid x \mid, & x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, +\infty) \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu elde edilir. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\frac{1}{3}, 1) \text{ ise,} \\ 2\text{sgn}x, & x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, +\infty) \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre, $x_1 = (-\frac{1}{3})$ ve $x_2 = 1$ f nin ekstremuma göre kritik noktalardır. $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$, $f(1) = 2$ ve $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ olduğuna göre, $min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \frac{2}{3}$ tür. $\diamond$

(8) $x = 0$ noktasının $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ biçiminde tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir yerel minimum noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x, f'(0) = 0,\ f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x, f''(0) = 0,\ f^{(3)}(x) = e^x - e^-x + 2\sin x, f^{(3)}(0) = 0,\ f^4(x) = e^x + e^-x + 2\cos x, f^{(4)}(0) = 4$, tür. $n = 4$ çift ve $f^{(4)}(0) = 4 > 0$ olduğuna göre, Önerme 4.7.11 dan dolayı 0, f nin bir yerel minimum noktasıdır. $\diamond$

(9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = 3x^2 - x^3$ fonksiyonunun içbükey ve dış bükey olduğu aralıkları ve büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 6x - 3x^2,\ f''(x) = 6(x-1)$ olduğuna göre, $x \in (-\infty, 1)$ için $f''(x) > 0$ ve $x \in (1, +\infty)$ için $f''(x) < 0$ dır. Buna göre, Sonuç 4.7.19 den dolayı fonksiyon $(-\infty, 1)$ üzerinde kesin içbükey , $(1, +\infty)$ üzerinde kesin dışbükeydir ve $(1, 2)$ noktası fonksiyonun büküm noktasıdır. $\diamond$

(10) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,$f(x) = x^x$ fonksiyonunun içbükey ve dışbükey olduğu aralıkları ve büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = x^x(1 + \ln x),\ f''(x) = x^x(\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2) > 0$ olduğundan, Sonuç 4.7.19 den dolayı fonksiyon $\mathbb{R}_+$ üzerinde kesin içbükeydir ve fonksiyonun büküm noktası yoktur. $\diamond$

(11) $(-\sigma, \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\sigma^2})$ ve $(\sigma, \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\sigma^2}))$ noktaları $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ fonksiyonunun büküm noktası olması için pozitif h sayısı ne olmalıdır?

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = -\frac{2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2},\ f''(x) = \frac{2h^3(2h^2x^2-1)}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ olduğundan, $f''(x) = 0 \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}h}$ bulunur. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}h}$ noktalarını geçtikçe $f''(x)$ fonksiyonu işareti degiştiğinden $h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}, \sigma > 0$ oldugunda $(\pm\sigma, \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\sigma^2})$ noktaları f nin büküm noktasıdır. $\diamond$

(12) $x = \frac{t^3}{1+t^2},\ y = \frac{t^3-2t^2}{1+t^2}$ parametrik denklemleri ile tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz.

Çözüm: $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları t'ye göre $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir ve $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$x'_t = \frac{(t^2+1)3t^2 - 2t^4}{(1+t^2)^2} = \frac{t^2(t^2+3)}{(1+t^2)^2} > 0$$

dır. O halde, (4.20) den dolayı y'_x türevini $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ formülü yardımıyla bulabiliriz. $y'_t = \frac{t(t-1)(t^2+t+4)}{(1+t^2)^2}$ olduğundan, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t-1)(t^2+t+4)}{t(t^2+3)}$ olduğu elde edilir. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $t^2 + t + 4 > 0$ olduğuna göre, $y'_x = 0 \Longrightarrow t = 1$ dir. O halde, $x = \frac{1}{2}$ ($t = 1$ iken) ve $x = 0$($t = 0$ iken) $y = f(x)$ fonksiyonunun ekstremumuna göre kritik noktalardır.
y'_x türev fonksiyonu $x = 0$ noktasından geçişte işaretini pozitiften negatife ve $x = \frac{1}{2}$ noktasından geçişte işaretini negatiften pozitife değiştirir. Buna göre, $x = 0$ noktası f nin yerel maksimum noktasıdır. $f(0) = 0$ ve $f(\frac{1}{2}) = y(1) = -\frac{1}{2}$ değerleri f nin sırasıyla yerel maksimum ve yerel mininmum değerleridir. $\diamond$

(13) $y = f(x) = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$ fonsiyonunun grafigini çiziniz.

Çözüm:

(a) fonksiyonun tanım bölgesi $D(f) = \mathbb{R}$ dir.

(b) $x = 0 \Longrightarrow y = 0,\ x = -1,\ y = 0$ olduğuna göre, eğri Oy eksenini $(0,0)$ noktasında , Ox eksenini de $(-1,0)$ noktasında keser . $f \in C(\mathbb{R})$ ve $x \in (-\infty, 0) \setminus \{-1\}$ için $y < 0$, $x \in (0, +\infty)$ için $y > 0$ dır. f ne tek ne de çift degildir. ayrıca , f hem de periyodik değildir.

(c) Fonksiyon $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğuna göre, düşey asimtotu yoktur. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2} = \pm\infty$ olduguna göre, f nin yatay asimtotu da yoktur. $x \to 0$ iken $f(x) \sim x,\ x \to -1$ iken $f(x) \sim (x+1)^{\frac{2}{3}},\ |x| \to -\infty$ iken $f(x) \sim x^{\frac{5}{3}}$ olduğuna göre, f nin grafiği yeteri kadar büyük $|x|$ için $y = x^{\frac{5}{3}}$ fonksiyonunun grafiğine

$x = -1$ noktası civarında $y = -(x+1)^{\frac{2}{3}}$ fonsiyonun grafiğine, $x = 0$ noktası civarında ise $y = x$ fonksiyonun grafiğine benzerdir.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ için $f'(x) = \frac{5(x+\frac{3}{5})}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}}$ olur. Buna göre, $x \in (-\infty,-1)\cup(-\frac{3}{5},+\infty)$ için $f'(x) > 0$ $x \in (-1,-\frac{3}{5})$ için $f'(x) < 0$ olduğundan, f fonksiyonu $(-\infty,-1)$ ve $(-\frac{3}{5},+\infty)$ aralıkları üzerinde artan, $(-1,-\frac{3}{5})$ aralığında ise, azalandır. Demek ki, $x = -1$ noktası f nin yerel maksimum,$x = -\frac{3}{5}$ noktası ise f nin yerel minimum noktasıdır. $f(-1) = 0$ ve $f(-\frac{3}{5}) = -\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}$ f nin sırası ile yerel maksimum ve yerel minimum değeridir.

(e) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ için $f''(x) = \frac{10(x+\frac{6}{5})}{9(x+1)^{\frac{4}{3}}}$ olur. O halde, $x \in (-\infty,-\frac{6}{5})$ için $f''(x) > 0$, $x \in (-\frac{6}{5},-1)\cup(-1,+\infty)$ için $f''(x) < 0$ olduğuna göre, fonksiyonumuz $(-\infty,-\frac{6}{5})$ aralıgında dışbükey, $(-\frac{6}{5},-1)$ ve $(-1,+\infty)$ aralıklarında içbükeydir. $(-\frac{6}{5},-\frac{6}{25}\sqrt[3]{5})$ noktası f nin büküm noktasıdır.

(f)

x	$(-\infty,-6.5)$	-6.5	$(-6.5,-1)$	-1	$(-1,-0.6)$
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$-\frac{6}{25}\sqrt[3]{5}$	$\nearrow$	0	$\searrow$
$f''(x)$	$-$		$+$		$+$

x	-0.6	$(-0.6,+\infty)$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}$	$\nearrow +\infty$
$f''(x)$		$+$

Fonksiyonun grafiği Şekil 4.12 de verilmiştir.

$\diamond$

(14) $x^3 + y^3 = 3xy$ denklemi ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Verilen denklem r ve θ kutupsal koordinatlar ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$) cinsinden

$$r = r(\theta) \quad = \quad \frac{3\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta^3 + \sin\theta^3} \tag{4.85}$$

biçiminde yazılabilir. Örnek 4.7.33 de bu eğrinin incelenmesi yönünde ilk adımlar atmıştık. Bu incelemeleri tamamlayarak (4.85) eğrisinin grafiğini çizelim. $\cos\theta = 0$ olduğunda (4.85) ten $r = 0$, yani $x = y = 0$ olduğu elde edilir. $\cos\theta \neq 0$ olduğunda $t = tan\theta$ olmak üzere verilen denklem

$$x = \frac{3t}{t^3+1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^2+1} \tag{4.86}$$

biçiminde parametrik denklemler yardımı ile yazılabilir. $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ için $x'_t = \frac{3(1-2t^3)}{(t^3+1)^2}$ olduğuna göre, $x(t)$ fonksiyonu $(-\infty, -1)$ aralıgında 0 'dan $+\infty$ 'a kadar , $(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ aralıgında $-\infty$ 'dan $\sqrt[3]{4}$ 'e kadar artan ve $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$ aralığında ise, $\sqrt[3]{4}$ 'den 0'a kadar azalandır. Bu aralıklar üzerinde $x = x(t)$ fonksiyonunun tersi mevcut olduğundan, (Önerme

3.2.9 dan dolayı) (4.86) denklemleri sırası ile $(0,+\infty)$,$(-\infty,\sqrt[3]{4})$ ve $(0,\sqrt[3]{4})$ aralıkları üzerinde $y = f(x)$ (eğrinin 1. parçası) , $y = g(x)$ (eğrinin 2. parçası) ve $y = h(x)$ (eğrinin 3. parçası) gibi üç fonksiyon belirlemektedir.
$x \in (0,+\infty)$ olsun.$\forall t \in (-\infty,-1)$ için $y'_t = \frac{3t(2-t^3)}{(t^3+1)^2}$ olduğuna göre, $f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2-t^3)}{(1-2t^3}$, $f''(x) = \frac{2(1+t^3)^4}{3(1-2t^3)}$ bulunur. O halde, $\forall x \in (0,+\infty)(\forall t \in (-\infty,-1)$ için $f'(x) > 0$ ve $f''(x) > 0$ olacağından f fonksiyonu $(0,+\infty)$ aralığında azalan ve içbükeydir.
g ve h fonsiyonlarının incelenmesi benzer şekilde yapılır.
$g(x)$ fonsiyonu $(-\infty,0)$ aralığında azalan ($+\infty$ dan 0 a kadar), $(0,\sqrt[3]{4})$ aralığında artan (0 dan $\sqrt[3]{2}$ ye kadar) ve $\forall x \in (-\infty,\sqrt[3]{4})$ için $g''(x) > 0$ olduğundan, $(-\infty,\sqrt[3]{4})$ aralığında içbükeydir.
$h(x)$ fonksiyonu $(0,\sqrt[3]{2})$ aralığında artan (0 dan $\sqrt[3]{4}$ ye kadar) $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ aralığında azalan ($\sqrt[3]{4}$ den $\sqrt[3]{2}$ ye kadar) ve $\forall x \in (0,\sqrt[3]{4})$ için $h''(x) > 0$ olduğundan, $(0,\sqrt[3]{4})$ aralığında dışbükeydir.

x	0	$(0,+\infty)$	x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{4}$
$f'(x)$		$+$	$g'(x)$	$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow,-\infty$	$g(x)$	$+\infty\ \searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$
$f''(x)$		$+$	$g''(x)$	$+$		$+$	

x	0	$(0,\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$
$h'(x)$		$+$		$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}$
$h''(x)$		$+$		$+$	

Fonksiyonun grafiği Şekil 4.13 de verilmiştir.

$\diamond$

(15) $f(2) = 3$, $f'(2) = -1$, $f''(2) = f^{(3)}(2) = f^{(4)}(2) = f^{(5)}(2) = 0$, $f^{(6)}(2) = 1440$ olduğuna göre, $x = 2$ noktası civarında $y = f(x)$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm: $(2, 3)$ noktasında $y = f(x)$ eğrisine çizilen teğet denklemi $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 3 = -(x-2) \Rightarrow y = -x + 5$ biçimindedir. $f^{(4)}(x) = g(x)$ olsun. $g'(2) = f^{(5)}(2) = 0$, $g''(2) = f^{(6)}(2) > 0$ olduğuna göre, $x = 2$ noktası g nin bir minimum noktasıdır. O halde, $g(2) = f^{(4)}(2) = 0$ olduğundan dolayı $x = 2$ noktasının bir $U(2)$ komşuluğunda $g(x) \geq 0$ dır. $f''(x) = h(x)$ olsun. $h'(2) = f^{(3)}(2) = 0$ ve $\forall x \in U(2)$ için $h''(x) = f^{(4)}(x) = g(x) \geq 0$ olduğuna göre, $x = 2$ noktasının bir $U'(2)$ komşuluğunda $x = 2$ noktası h fonksiyonunun bir minimum noktasıdır. $h(2) = f''(2) = 0$ olduğuna göre, $x = 2$ noktasının bir $U''(2)$ komşuluğunda $h(x) = f''(x) \geq 0$ olacaktır. Buna göre , $U''(2)$ komşuluğunda $y = f(x)$ eğrisi dışbükeydir. $y = f(x)$ eğrisinin grafiği şekil 4.14 te verilmiştir.

◇

4.8.2 Ek Problemler

(16) Aşağıdaki $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının (a, b) aralığında ekstremumlarını ve $[a, b]$ aralığında en küçük (m) ve en büyük (M) değerlerini bulunuz.

(a) $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}, \quad a = -1, b = 4;$

(b) $f(x) = (x-3)^3 e^{|x+1|}, \quad a = -2, b = 4;$

(c) $f(x) = \ln(1 + \sqrt{|\, x \,|\, (1+x)^2}), \quad a = -2, b = 1;$

(d) $f(x) = \arctan \sqrt{|\, x \,|\, (x-1)^2}, \quad a = -1, b = 2;$

(e) $f(x) = \frac{[[\, x \,]]}{x} + \frac{x}{3}, \quad a = 1, b = 3;$

(f) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3}\mathrm{sgn} x) + \sin(x + \frac{\pi}{6}), \quad a = -\pi, b = \pi.$

Cevap: (a) $x = 3$ te minimum f, 0 dır, $x = 0$ da minimum f, 9 ve $x = 1$ de maksimum f, $4e$ dir ;
(b) $x = 0$ da minimum f, $-27e$ dır, $x - 1$ de maksimum f, -64 tür ;
(c) $x = 0$ ve $x = -1$ de minimum f, 0, $x = -\frac{1}{3}$ te maksimum

f, $\ln(1+\frac{2\sqrt{3}}{9})$ dur ;
(d) $x=0$ ve $x=1$ de minimum f, 0 dır, ve $x=\frac{1}{3}$ te maksimum f, $\arctan\frac{2\sqrt{3}}{9}$ dur ;
(e) $x=\sqrt{3}$ te minimum f, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x=\sqrt{6}$ da minimum f, $\frac{4}{\sqrt{6}}$ ve $x=2$ de maksimum f, $\frac{5}{3}$ tür ;
(f) $x=-\frac{2\pi}{3}$ te minimum f, -2 , $x=0$ da maksimum f, $\frac{3}{2}$ dir.

(17) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı kümeler üzerinde inf ve sup değerlerini bulunuz?

(a) $f(x)=\frac{1}{x}+x^2$, $(0,1]$; (b) $f(x)=\ln x-x$, $\mathbb{R}_+$;
(c) $f(x)=2\tan x-\tan^2 x, (\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$; (d) $f(x)=\tan x-3x, [\frac{-\pi}{4},\ \frac{\pi}{2})$;
(e) $f(x)=(x^2+4)e^{-x}$, $\mathbb{R}_+$; (f) $f(x)=e^{-x^2}\cos(x^2)$, $\mathbb{R}$;
(g) $f(x)=x+(\frac{2}{x-2})^2$, $(\frac{3}{2},5)$; (h) $f(x)=\frac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+|x|}$, $\mathbb{R}$.

Cevap:

(a) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, $+\infty$; (b) $-\infty$, -1; (c) $-\infty$, 1;
(d) $\sqrt{2}-3\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, $+\infty$; (e) 0, 4; (f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$, 1;
(g) 5, $+\infty$; (h) 0, $\sqrt{3}$.

(18) Aşağıdaki fonksiyonların içbükey ve dışbükey oldukları aralıkları ve büküm noktalarını bulunuz.

(a) $2x^4-3x^2+x-1$; (b) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$; (c) $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$;
(d) $f(x)=\sqrt[3]{4x^3-12x}$; (e) $f(x)=x+sinx$; (f) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

Cevap: (a) $(-\infty,-\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},+\infty)$ içbükey, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ dışbükey aralıkları, $(-\frac{1}{2},-\frac{17}{8})$, $(\frac{1}{2},-\frac{9}{8})$ büküm noktaları;
(b) $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$ dışbükey,$(-1,1)$ içbükey aralıkları büküm noktası yoktur.
(c) $(-\infty,-3)$ içbükey, $(-3,+\infty)$ dışbükey aralıkları $(-3,0)$ büküm noktası,
(d) $(-\infty,-\sqrt{3})$ içbükey $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},+\infty)$ dışbükeylik aralıkları $(0,0)$, $(-\sqrt{3},0)$ ve $(\sqrt{3},0)$ büküm noktaları;
(e) $(2k\pi,2(1+2k)\pi), k\in\mathbb{Z}$ dışbükey, $((1+2k)\pi,2(1+k)\pi), k\in\mathbb{Z}$

içbükey aralıkları, $(0, k\pi), k \in \mathbb{Z}$ büküm noktaları;
(f) $(-\infty, -\frac{1}{2})$ dışbükey, $(-\frac{1}{2}, 0), (0, +\infty)$ dışbükeylik aralıkları, $(-\frac{1}{2}, e^{-2})$ büküm noktası.

(19) Aşagıdaki paremetrik denklemlerle tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun büküm noktalarını bulunuz.
(a) $x = te^t,\ y = te^{-t},\ t \in (0, +\infty)$;
(b) $x = \frac{2t^2+2}{t},\ y = \frac{t^3+3t+1}{t^2},\ t \in (0, 1)$.

Cevap: (a) $(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$; (b)$(5, \frac{21}{2})$.

(20) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerinin asimtotlarını bulunuz.

(a) $f(x) = \frac{x^3}{6x^2-8-x^4}$;	(b) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$;
(c) $f(x) = \frac{x^2}{\lvert x\rvert+1}$;	(d) $f(x) = \frac{x^3-3ax^2+a^3}{x^2-3bx+2b^2}$;
(e) $f(x) = x + \sqrt{4x^2+1}$;	(f) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$;
(g) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$;	(h) $f(x) = 1 - xe^{-\frac{1}{\lvert x\rvert}-\frac{1}{x}}$;
(i) $f(x) = x2^{\frac{1}{x^2}}$;	(j) $f(x) = x(1-\frac{1}{x})^x$;
(k) $f(x) = 2x + \coth x$;	(l) $f(x) = x + \frac{\sin x}{2x}$;
(m) $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$;	(n) $f(x) = \frac{1}{\mathrm{arccot}\frac{1}{\mathrm{x}}}$;

Cevap:

(a) $x = -2, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = 2, y = 0$;	(b) $x = -2, y = 1$;
(c) $y = -x-1, y = x-1$;	(d)$x = b, x = 2b, y = x - 3(a-b)$;
(e) $y = -x, y = 3x$;	(f)$x = 0, y = 1$;
(g) $y = 1$;	(h) $y = 1-x, y = 3-x$;
(i) $x = 0, y = x$;	(j) $y = \frac{x}{e} - \frac{1}{2e}$;
(k) $x = 0, y = 2x-1, y = 2x+1$;	(l)$y = x$;
(m) $y = 0$;	(n) $x = 0, y = \frac{2}{\pi}$.

(21) Parametrik denklemlerle tanımlanan aşağıdaki fonksiyonların grafiklerinin asimtotlarını bulunuz.

(a) $x = \frac{t-8}{t^2-4},\ \ y = \frac{3}{t(t^2-4)}$; (b) $x = t^3+3t+1,\ \ y = t^3-3t+1$;

(c) $x = t + \sin t, \quad y = t + \cos t$; (d) $x = t \ln t, \quad y = t \ln(t+1)$;
(e) $x = 2\cos t, \quad y = \tan 2t$.

Cevap:

(a) $x = 2, \quad y = \frac{3(2x+3)}{40}, \quad y = -\frac{2x+1}{8}$; (b) asimtotu yoktur.
(c) asimtotu yoktur. (d) $x \to +\infty$ iken $y = x + 1$;
(e) $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$.

(22) Kutupsal koordinatlarla tanımlanan aşağıdaki $y = f(x)$ fonksiyonların grafiklerinin asimtotlarını bulunuz.

(a) $r = \frac{\pi}{\theta - \frac{\pi}{4}}$; (b) $\theta = \frac{r}{r-1}$;
(c) $r = 2\tan\theta$; (d) $r = \frac{2}{|\sin 2\theta|}$;
(e) $r = \frac{a}{\cos 3\theta}(a > 0)$.

Cevap: (a) $r = \frac{\pi}{\sin(\theta - \frac{\pi}{4})}$; (b) $r = \frac{1}{\sin(\theta-1)}$;
(c) $r = \frac{2}{\cos\theta}, \; r = -\frac{2}{\cos\theta}$;
(d) $r = \frac{1}{\sin\theta}, \; r = -\frac{1}{\sin\theta}, r = \frac{1}{\cos\theta}, \; r = -\frac{1}{\cos\theta}$;
(e) $r = \frac{a}{3\sin(\frac{\pi}{6} - \theta)}, r = \frac{a}{3\sin(\theta + \frac{\pi}{6})}, r = -\frac{a}{3\cos\theta}$.

(23) Aşağıdaki denklemlerle tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonlarının grafiklerinin asimtotlarını bulunuz.

(a) $x^2y + xy^2 = 1$; (b) $x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$;
(c) $4x^2 + 9y^2 = x^2y^2$; (d) $4x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} = 1$;
(e) $(x^2 - y^2)^2 + 4xy = 0$; (f) $(x^2 + y^2)(y-1)^2 - y^2 = 0$.

Cevap:

(a) $y = 0, \; x = 0, \; y = -x$; (b) $y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8}, \; y = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8}$;
(c) $x = 3, \quad x = -3, \quad y = 2, \quad y = -2$; (d) $y = 2\sqrt{2}x, \quad y = -2\sqrt{2}x$;
(e) $y = -x + 1, \quad y = -x - 1$; (f) $y = 1$.

(24) Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin grafiklerini çiziniz.

(a) $y = \frac{x^3}{4} - 3x + 4$; (b) $y = 32x^2(x^2 - 1)^3$;
(c) $y = \frac{20x^2}{(x-1)^3}$; (d) $y = \frac{1+x^2}{1+(x-2)^3}$;
(e) $y = x + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}$; (f) $y = \frac{x^4}{x^3+2}$;

(g)	$y = \frac{x^5}{(x^2-1)^2};$	(h)	$y = x - \sqrt{x^2 - 2x};$
(i)	$y = \sqrt[4]{x^4 - 4x^3};$	(j)	$y = \frac{8x}{\sqrt{x^2-4}};$
(k)	$y = \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1};$	(l)	$y = \sqrt{\frac{3x^2-4}{x^3}};$
(m)	$y = \sqrt[3]{x(x-1)^2};$	(n)	$y = (x^2 + 8x + 12)^{2/3};$
(o)	$y = \sqrt[3]{(\frac{x+1}{x+2})^2};$	(p)	$y =\mid x \mid \sqrt{1 - x^2};$
(q)	$y = \sqrt{\mid 3x^2 - x^3 \mid};$	(r)	$y = \sqrt[3]{x^2 \mid 2 - x \mid};$
(s)	$y = (1 - x)e^{3x+1};$	(t)	$y = \frac{e^{-x}}{1-x};$
(u)	$y = xe^{\frac{1}{x^2}};$	(v)	$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}};$
(w)	$y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x;$	(x)	$y = \cos x \cos 2x;$
(y)	$y = 2x - \tan x;$	(z)	$y = \arccos\frac{1-\mathrm{x}^2}{1+\mathrm{x}^2};$
(xx)	$y = e^{-\arctan x};$	(yy)	$y = (1 + x)^{\frac{1}{x}};$
(zz)	$y = 2lnx - 5\arctan x.$		

(25) Aşağıda parametrik denklemlerle tanımlanan fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

(a)	$x = \frac{1}{4}(t+1)^2,\ y = \frac{1}{4}(t-1)^2;$	(b)	$x = \frac{t^2}{1-t^2},\ y = \frac{1}{1+t^2};$
(c)	$x = \frac{t^2+1}{4(t-1)},\ y = \frac{t}{t+1};$	(d)	$x = \frac{t}{1-t^2},\ y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}.$

Cevap: (a) Şekil 4.15; (b) Şekil 4.16; (c) Şekil 4.17; (d) Şekil 4.18.

(26) Aşağıdaki kapalı şekilde tanımlanan fonksiyonların grafiğini çiziniz.

(a)	$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(a > 0);$	(b)	$x^4 + 2y^3 = 4x^2y;$
(c)	$x^2y^2 = 1;$	(d)	$x^3 + y^3 = 3x^2.$

Cevap: (a) Şekil 4.19; (b) Şekil 4.20; (c) Şekil 4.21; (d) Şekil 4.22.

(27) Aşağıdaki kutupsal koordinatlarla tanımlanan fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

(a)	$r = \frac{5}{\theta},\quad \theta \in \mathbb{R}_+;$	(b)	$r^2 = 2a^2\cos^2 2\theta,\quad \theta \in [0, 2\pi];$
(c)	$r = a\cos\theta + b;$	(d)	$r = a\sin 3\theta(a > 0).$